



TITLE:

ELLIPTIC PDES ON COMPACT RICCI LIMIT SPACES AND APPLICATIONS (Shapes and other properties of solutions of PDEs)

AUTHOR(S):

本多, 正平

CITATION:

本多, 正平. ELLIPTIC PDES ON COMPACT RICCI LIMIT SPACES AND APPLICATIONS (Shapes and other properties of solutions of PDEs). 数理解析研究所講究録 2016, 2006: 44-53

ISSUE DATE:

2016-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/231532>

RIGHT:

ELLIPTIC PDES ON COMPACT RICCI LIMIT SPACES AND APPLICATIONS

東北大学 理学研究科数学専攻 本多正平
SHOUHEI HONDA
MATHEMATICAL INSTITUTE,
TOHOKU UNIVERSITY

本稿では、RIMS で行われた研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」でお話をさせていただいた、[12] の内容を紹介する。また、最近の [14] の内容についても簡単に紹介する。粗く言って前者は関数を扱っているもので、後者は微分形式といった関数とは異なる対象を扱っている。

では始めに、グロモフ・ハウスドルフ収束の定義を述べる（これは [10] のオリジナルのものとは異なるが、[7] で与えられた同値なものである）。

定義 0.1. [10, 7] コンパクト距離空間の列 X_i がコンパクト距離空間 X にグロモフ・ハウスドルフ収束するとは、0 に収束する正の実数列 $\epsilon_i \rightarrow 0$ と、(連続である必要はない) 写像の列

$$\phi_i : X_i \rightarrow X$$

が存在して以下の2条件が成り立つときを言う：

- (1) (ϕ_i はほぼ距離を保つ) 任意の i と任意の $x, y \in X_i$ に対して

$$|d_{X_i}(x, y) - d_X(\phi_i(x), \phi_i(y))| < \epsilon_i$$

が成り立つ。ここに $d_{X_i}(x, y)$ で x と y の距離を表す。

- (2) (ϕ_i はほぼ全射である) 任意の i に対して

$$X = B_{\epsilon_i}(\phi_i(X_i))$$

が成り立つ。ここに $B_r(A)$ で A の r 近傍を表す。

このとき、点列 $x_i \in X_i (i < \infty)$ が点 $x \in X$ に収束するとは、 $\phi_i(x_i)$ が x に X 内で収束するときをいい、それを $x_i \xrightarrow{GH} x$ と表す。

1. 関数に作用する微分作用素のスペクトル収束

ここでの設定は次である：

- (1) n を自然数、 K を実数とする。

- (2) $\{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ を n 次元コンパクトリーマン多様体の列で、リッチ曲率が一様に下に有界であるという、次の条件を満たすものとする：

$$\text{Ric}_{X_i} \geq K.$$

- (3) X を X_i のグロモフ・ハウスドルフ極限となるコンパクト距離空間とする。
 (4) X 上のボレル確率測度 ν を X_i 上の自然な確率測度

$$\frac{H^n}{H^n(X_i)}$$

の極限とする。ここに、 H^n は n 次元ハウスドルフ測度で、上の極限の意味は

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{H^n(B_r(x_i))}{H^n(X_i)} = \nu(B_r(x))$$

が任意の収束列 $x_i \xrightarrow{GH} x$ ($x_i \in X_i, x \in X$) と任意の $r > 0$ で成り立つときを言う (これは空間が止まっているとき、すなわち $X_i \equiv X$ のときは測度の弱収束に他ならない。よってこれは測度の弱収束の一般化である)。

この設定に関して一つだけ注意を与えたい。それは上記設定のコンパクト性である。上で (1) と (2) の状況を考え、かつ X_i の直径が一様に有界とすると、適切に部分列を抜くことにより、 X と ν が存在して、設定 (3) と (4) を満たすことが知られている。

この状況で次が知られている。これは深谷によって [6] で予想され、チーガー・コールディングによって [5] で解かれたもので、リッチ曲率に関わるスペクトル収束として現れた最初のものである。

定理 1.1. [5] 次が成り立つ：

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_k(X_i) = \lambda_k(X).$$

ここに、 $\lambda_k(X)$ は X 上の (関数に作用する) ラプラシアン Δ の (重複度を込めて数えた) k 番目の固有値である。

この定理を正確に理解するために、まずは X 上のラプラシアンの定義について述べよう。一般に、 $p \in (1, \infty)$ と X 上のリプシッツ関数 f に対して、

$$\|f\|_{H^{1,p}} := (\|f\|_{L^p}^p + \|\text{Lip} f\|_{L^p}^p)^{1/p}$$

でそのノルムを定義する。ここに

$$\text{Lip} f(x) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)}$$

とする。 X 上の全てのリプシッツ関数からなる線形空間をこのノルムで完備化したものを $H^{1,p}(X)$ と書いてソボレフ空間という。

次に、 $\mathcal{D}(\Delta, X)$ で以下を満たす $f \in H^{1,2}(X)$ 全体を表すとする：

- ある $g \in L^2(X)$ が存在して,

$$\int_X \langle df, dh \rangle dv = \int_X fg dv$$

が任意の $h \in H^{1,2}(X)$ について成り立つ.

この g は存在すれば一意なので, Δf と書く. これがラプラシアン の定義である. もちろん X が滑らかで, f も滑らか, かつ v が自然な確率測度のときには通常 の定義と一致する. それは発散公式の帰結である.

以上の後半においてまたいくつか未定義用語が現れた. 例えば $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X の自然なリーマン計量であり, df はほとんどいたるところ定義された微分 1 形式である. これらはもちろん考えている対象が全て滑らかならば通常通り理解される. 上のような状況でも, 上記がすべてうまくいくくらいの X の正則性がチーガー・コールディングの一連の研究 [2, 3, 4, 5] によって保障されている (より正確には修正可能と呼ばれる性質を持つ). ただ注意をして欲しいのは, その正則性はまさに必要最小限といったもので, 例えば一般には, X の特異点集合は稠密になりうる (特異点, 正則点の定義は本稿では与えない). [16] を見て欲しい.

上の定理はこのラプラシアンのスペクトラムが離散的で, 非有界であり, そしてそのスペクトラムに関して主張されているような連続性が成り立つということを意味している.

この定理が本稿の出発点になる. 自然な問いとして, ラプラシアンだけでなく, 他の微分作用素で同様のスペクトル収束 (固有値が収束するという意味である) が示せないか, というものが考えられる.

答えはイエスで次が答えである:

定理 1.2. [8, 11, 12] 次の微分作用素に対して同様のスペクトル収束が成立する:

- (1) シュレーディンガー作用素:

$$\Delta f + Vf.$$

- (2) 山辺作用素:

$$\Delta f + \frac{n-2}{4(n-1)}sf + c|f|^{(n+2)/(n-2)}.$$

ここに c は (適切な) 定数で, s はスカラー曲率である.

- (3) p -ラプラシアン:

$$-\operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f).$$

- (4) 重みつき $\bar{\partial}$ -作用素:

$$e^{-F}\bar{\partial}^*(e^F\bar{\partial}f).$$

注意 1.3. より正確には, 上で述べた微分作用素それぞれに応じて, スペクトル収束の意味が異なる. 例えば, (1) と (4) は先と全く同じ意味のスペクトル収束だが, 山辺作用素は c (山辺定数と呼ばれる) の連続性, (3) は次の方程式:

$$-\operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = \lambda|f|^{p-2}f$$

の正の第一固有値のみのスペクトル収束である．それぞれ適切な仮定をおく必要があるが，ここでは簡潔さを優先して上記のような表現をとった．詳しくは論文を見ていただけたら幸いである ((1) と (2) が [12] で, (3) が [11], (4) が [8] に対応する)．

定理 1.2 の証明は定理 1.1 のものとは本質的に異なり, [11] で導入されたグロモフ・ハウスドルフ収束理論における L^p 収束の概念を用いる．そこでそれを以下に紹介しよう．

簡単のために以下ではベクトル場のみを考えるが, テンソル場でも全く同様にできることを注意しておく．まず $p \in (1, \infty)$ を止めて, 各 $i < \infty$ に対して, X_i 上の L^p -有界なベクトル場 (もちろん連続である必要はない) V_i を一つずつとって, さらに X 上の L^p -有界なベクトル場 V をとる (先にも述べたとおり, X にはボレル可測なベクトル場を考えるくらいの正則性はわかっていることに注意)．

この状況で次を定義したい：

‘ V_i が V に L^p -強 (もしくは弱) 収束する’.

これはもちろん空間が止まっているとき, すなわち

$$\left(X_i, \frac{H^n}{H^n(X_i)} \right) \equiv (X, v)$$

のときには通常のもので一致することも要請する．

この定義を与えようとするものの難しさは差 ‘ $V_i - V$ ’ を自然に考えることができないことである．この難点を克服したのが論文 [11] であり, 答えは次である：

定義 1.4. [11]

(1) V_i が V に L^p -弱収束するとは,

$$\sup_i \|V_i\|_{L^p} < \infty$$

かつ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_i)} \langle V_i, \nabla r_{y_i} \rangle dv_i = \int_{B_r(x)} \langle V, \nabla r_y \rangle dv$$

が任意の $r > 0$, 任意の $x_i \xrightarrow{GH} x$, 任意の $y_i \xrightarrow{GH} y$ に対して成り立つときを言う．ここに $v_i := H^n / H^n(X_i)$ であり, r_y で y からの距離関数 (これはリプシッツ関数である) を表す: $r_y(z) = d_X(y, z)$.

(2) V_i が V に L^p -強収束するとは, それが L^p -弱収束列であり, かつ

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|V_i\|_{L^p} \leq \|V\|_{L^p}$$

が成り立つときを言う．

この定義でうまくいっていることの説明はここでは与えない．興味をもたれた方は [13] も見て欲しい．

空間が止まっているときの L^p -収束の理論で成り立つ事実はこの定義の下でも成り立つことがチェックできる．例えば以下が成り立つ：

- 任意の L^p -有界列は L^p -弱収束部分列を持つ．

- L^p -弱収束列において、その L^p ノルムは下半連続である。

他にもソボレフの埋め込み定理などもあるが、ここでは次に、この枠組みにおけるレーリッヒ型コンパクト性定理を紹介しよう：

定理 1.5. [11] $p \in (1, \infty)$ を止めて、各 $i < \infty$ に対して、 $f_i \in H^{1,p}(X_i)$ をとり、次を仮定する：

$$\sup_i \|f_i\|_{H^{1,p}} < \infty.$$

このとき $f \in H^{1,p}(X)$ と部分列 $f_{i(j)}$ が存在して次が成り立つ：

- (1) $f_{i(j)}$ は f に L^p -強収束する。
- (2) $\nabla f_{i(j)}$ は ∇f に L^p -弱収束する。

この定理で、空間が止まっているときに古典的なレーリッヒのコンパクト性定理に他ならず、それは偏微分方程式の解の弱解を見つけるときに非常に有用であることがよく知られている。

ではそのグロモフ・ハウスドルフ収束版である定理 1.5 の応用は何か、それがスペクトル収束である。ここでは簡単のために、定理 1.5 を用いた定理 1.1 の簡単な別証明を紹介する：

定理 1.1 の証明。

簡単のため、 X が一点でない状況での正の第一固有値 $\mu_1(= \lambda_2)$ の連続性のみチェックすることにする (X が一点のときは $\mu_1(X) = \infty$ と約束する。ちなみに $\lambda_1(X) = 0$ である)。一般の場合は適当な空間のスケール変換と以下の議論、そして min-max 原理で簡単に示せる。

証明は二つのパートからなる。まずは上半連続性

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \mu_1(X_i) \leq \mu_1(X)$$

を示そう。ちなみにこちらは簡単なパートである。まず $f \in \mathcal{D}(\Delta, X)$ を $\mu_1(X)$ -固有関数とする。このとき、上で述べた L^p -収束の枠組みから、近似列 $f_i \in H^{1,2}(X_i)$ で、 $f_i, \nabla f_i$ がそれぞれ $f, \nabla f$ に L^2 -強収束するものが取れることがわかる。

そこでレイリー商を考えると、

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \mu_1(X_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\nabla f_i\|_{L^2}^2}{\|f_i\|_{L^2}^2} = \frac{\|\nabla f\|_{L^2}^2}{\|f\|_{L^2}^2} = \mu_1(X)$$

となって上半連続性を得る。

次に下半連続性

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mu_1(X_i) \geq \mu_1(X)$$

をチェックしよう。こちらが難しいパートである。

各 $i < \infty$ に対して $f_i \in \mathcal{D}(\Delta, X_i)$ を $\mu_1(X_i)$ -固有関数で $\|f_i\|_{L^2} = 1$ を満たすものをとる (もちろん楕円型方程式の解の正則性より f_i は滑らかである)。このとき前半の上半連続性を考えると、

$$\sup_i \|f_i\|_{H^{1,2}} < \infty$$

がわかる．よって，定理 1.5 より，あらかじめ部分列を抜いておくことにより，ある $f \in H^{1,2}(X)$ があって， f_i が f に L^2 -強収束し， ∇f_i が ∇f に L^2 -弱収束するとしてよい．このとき L^2 -弱収束列に関するノルムの下半連続性より

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mu_i(X_i) = \liminf_{i \rightarrow \infty} \|\nabla f_i\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla f\|_{L^2}^2 \geq \mu_1(X)$$

となって，下半連続性が言えた． \square

この証明を見ると，いろいろな偏微分方程式の解の弱解を見つけるときの議論と全く同様であることに気づかれると思う．定理 1.2 で述べられた微分作用素のスペクトル収束の証明も全く同様であり，哲学的には粗く言って次がいえる：

‘古典的なレーリッヒのコンパクト性定理を用いて弱解の存在が言える偏微分方程式に対しては，グロモフ・ハウスドルフ位相に関するスペクトル収束が常に成り立つ’．

以上で関数に作用する微分作用素のスペクトル収束は終わりとし，次に微分形式に作用する微分作用素を考えよう．

2. 微分形式に作用する微分作用素のスペクトル収束

ここでの設定は次である：

- (1) n を自然数， K を正の実数とする．
- (2) $\{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ を n 次元コンパクトリーマン多様体の列で，リッチ曲率が一様に有界であるという，次の条件を満たすものとする：

$$|\mathrm{Ric}_{X_i}| \leq K.$$

- (3) X を X_i のグロモフ・ハウスドルフ極限となるコンパクト距離空間とし，そのハウスドルフ次元は n とする．

前章とは異なり，リッチ曲率の有界である，ハウスドルフ次元が n であるなどの余分な仮定がついているが，測度の収束については何も仮定していないことに注意して欲しい．

注意 2.1. 以下で述べられる主張において，ハウスドルフ次元が n であるという仮定は本質的であるが，リッチ曲率の上からの一様有界性の仮定は余分であると思われる．技術的な理由でそれははずせなかったが，将来的にははずせると信じている．

この状況で， $H^n/H^n(X)$ が極限測度になることが知られている．すなわち，前章の条件 (4) が

$$v = \frac{H^n}{H^n(X)}$$

として成り立つ．

また，この設定の典型例はアインシュタイン多様体の列であることにも注意しておこう．この場合はさらに X の正則集合が滑らかなリーマン多様体となることも知られている．これらについては [3] を見て欲しい．

この状況で次が成り立つと予想される：

予想 2.2.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} b_1(X_i) = b_1(X) < \infty.$$

ここに、 b_1 で第一ベッチ数を表す.

この予想は私が予想したものだが、最後の有限性すら不明であることを注意しておきたい. この予想は今のところとても難しく、例えば X が通常の意味で普遍被覆が存在するかどうかすらわかっていない.

そしてこの予想では X のハウスドルフ次元が n であるという仮定は本質的である. 実際、二次元平坦トーラスの片側の円周をつぶすことを考えると、二次元トーラスが平坦なまま、円周にグロモフ・ハウスドルフ収束する状況が作れるが、第一ベッチ数は極限で 2 から 1 に下がってしまう.

そこでこの予想を支持する興味深い例を一つ紹介しよう.

例 2.3. [15, 17] 群 $\{\pm 1\}$ を 4 次元トーラス $\mathbf{T}^4 := \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^4$ に

$$(-1) \cdot (z_1, z_2) := (-z_1, -z_2)$$

で作用させ、 $X := \mathbf{T}^4/\{\pm 1\}$ とおき、その上の標準的な平坦オービフォールドリーマン計量を g とする. この g によって X は距離空間となる. X の特異点は全部で 16 個あり、

$$b_1(X) = 0, b_2(X) = 6$$

がすぐにチェックできることに注意しておく.

そこで次に $\pi: Y \rightarrow X$ をその最小特異点解消とする. このとき Y は $K3$ 曲面となることが知られている. 従って、

$$b_1(Y) = 0, b_2(Y) = 22$$

となる.

このとき、カラビ・ヤウの定理によって、 Y 上の滑らかなリーマン計量の列 g_i で次を満たすものが取れる:

- g_i はリッチ平坦なケーラー計量である.
- Y の g_i による体積は常に 1 である.
- X の任意の特異点 p に対して、 $\pi^{-1}(p)$ の g_i による体積は i^{-1} である.
- (Y, g_i) は (X, g) にグロモフ・ハウスドルフ収束する.

この例は先の予想を支持していることがわかり、さらには第二ベッチ数では同様の予想が成り立たないことも示している (従って高次のベッチ数についても先の予想は成り立たない).

ここで [14] の主結果の一つを紹介することができる. それは次である:

定理 2.4. [14]

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} b_1(X_i) \leq b_1^G(X) < \infty$$

が成り立つ。さらに

$$\lim_{i \rightarrow \infty} b_1(X_i) = b_1^G(X)$$

であるための必要十分条件は、列 X_i が 1 形式に作用するホッジラプラシアン

$$\Delta_{H,1} = \delta d + d\delta$$

の一樣なスペクトルギャップを持つことである、すなわち

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mu_{H,1}(X_i) > 0.$$

ここに、 b_1^G はジグリによって [9] で導入された測度距離空間上の 1 次元ド・ラームコホモロジーの次元で、 $\mu_{H,1}$ で $\Delta_{H,1}$ の正の最小固有値を表す。

この定理に関していくつかコメントをする。まず、 b_1^G の有限性も新しい結果である。また、ホッジラプラシアンを研究されている何人かの方に伺ったところ、上の定理で主張されているスペクトルギャップの存在はきっと正しいと思われるそうである。従って、やはり b_1 に関して等号が成立すると考えられる。しかし注意しておきたいのは、ジグリの定義したド・ラームコホモロジーの次元が通常のも的一致しているかは不明であり、それは今後の課題の一つである（もちろん滑らかなときにはそれらは一致することがわかっていて）。

ジグリが定義したド・ラームコホモロジーの正確な定義をここでは与えないが、測度距離空間上の熱流による関数の平滑化の正則性理論の近年の著しい発展を基礎に（例えば [1]）、微分形式のソボレフ空間を定義し、それを用いて構成されるとだけ述べておく。

定理 2.4 の証明のアイデアは $\Delta_{H,1}$ のスペクトル収束を考えることである。しかし、微分形式に作用するラプラシアンのスペクトル収束を考える際にも、 X のハウスドルフ次元が n であるという仮定は本質的になる。実際、先に述べた平坦トーラスの円周へのグロモフ・ハウスドルフ収束を考えると、 $\Delta_{H,1}$ の第二固有値が極限のそれに収束していないことがチェックできる。

[14] では実際にこの状況でスペクトル収束が成り立つことを示した：

定理 2.5. [14] 任意の $l \geq 1$ に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_l^{H,1}(X_i) = \lambda_l^{H,1}(X)$$

が成り立つ。ここに $\lambda_l^{H,1}$ で $\Delta_{H,1}$ の l 番目の固有値である。

ここでもいくつか注意を述べよう。 X 上でのホッジラプラシアンはジグリによって [9] で導入された測度距離空間としてのものを採用しており、先と同様、そのスペクトラムの離散性、非有界性も新しい結果である。

また、ジグリは彼自身のド・ラームコホモロジーに対して、ホッジ型の定理を示した。特に第 l ベッチ数の次元は調和 l 形式からなる空間の次元、すなわち l 形式に作用するホッジラプラシアン $\Delta_{H,l}$ の 0 固有値の重複度に等しい。このことから定理 2.5 が定理 2.4 を導くことがわかる。

注意 2.6. 関数のときのスペクトル収束では‘ X のハウスドルフ次元が n である’という仮定が必要なかったのに、対象を微分形式に変えたとなぜその仮定が必要になるのか。この問いに対する答えは、‘考えているベクトルバンドルのランクが退化しないことが本質的である’、というものである。例えば、関数を考えるというのはその空間の上の自明束の切断を考えていることになる。従って空間の次元が極限で変わっても自明束なのだから常にランクは 1 である。微分形式のときには余接束を考えることになるわけだが、このランクが極限で変化しないことの必要十分条件が‘ X のハウスドルフ次元が n である’ということになる。

以上から次の問いは自然であろう：

一般の l で $\Delta_{H,l}$ のスペクトル収束が成り立つか？

しかしこれは期待できない。それはなぜか。もしスペクトル収束が成り立つとすれば、重複度込みで X_i の 0 固有値が極限 X の 0 固有値に収束することになる。特に b_l が上半連続となるはずである。しかし例 2.3 で与えられた例は、 b_2 が極限で 22 から 6 に落ちている。これは例えばアインシュタイン多様体の列であっても、高次の微分形式に作用するホッジラプラシアン(Hodge Laplacian)のスペクトル収束が期待できないことを意味している。この意味で定理 2.5 はシャープな結果である。

最後にもう一つのスペクトル収束を紹介しよう。それは微分 l 形式に作用するもう一つの自然なラプラシアンである接続ラプラシアン：

$$\Delta_{C,l} := \nabla^* \nabla$$

のスペクトル収束である。この場合、ホッジラプラシアン(Hodge Laplacian)のときとは異なり、全ての微分形式に対してスペクトル収束が言える：

定理 2.7. [14] 任意の l, m に対して、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_l^{C,m}(X_i) = \lambda_l^{C,m}(X)$$

が成り立つ。ここに $\lambda_l^{C,m}$ で $\Delta_{C,m}$ の l 番目の固有値を表す。

以上のスペクトル収束を証明する際に鍵となるのはやはり、微分形式に対するレーリッヒ型コンパクト性定理をこの枠組みで与えることである。

ではなぜホッジラプラシアンでは 1 形式のみのスペクトル収束なのか。その答えは滑らかなリーマン多様体上のボホナー公式

$$-\frac{1}{2} \Delta |\eta|^2 = |\nabla \eta|^2 - \langle \Delta_{H,1} \eta, \eta \rangle + \text{Ric}(\eta^*, \eta^*)$$

に理由がある。ここに η は微分 1 形式である。これを $\Delta_{H,1}$ の固有微分形式 η に対して適用し、積分する。すると左辺は消えて、 $\nabla \eta$ の L^2 ノルムがコントロールでき、レーリッヒ型コンパクト性定理が適用できる状況になる。このようなことは、リッチ曲率の有界性のみの仮定の下、2 形式以上では期待できない。

ちなみに α が $\Delta_{C,l}$ の固有微分形式であれば, 直接的に $\nabla\alpha$ の L^2 ノルムがコントロールできる. よってやはりレーリッヒ型コンパクト性定理が適用できる. 以上が上記スペクトル収束の証明のからくりである.

REFERENCES

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré: Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below, *Duke Math. J.* 163 (2014), 1405-1490.
 - [2] J. Cheeger and T. H. Colding: Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products, *Ann. of Math.* 144 (1996), 189-237.
 - [3] J. Cheeger and T. H. Colding: On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, I, *J. Differential Geom.* 45 (1997), 406-480.
 - [4] J. Cheeger and T. H. Colding: On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, II, *J. Differential Geom.* 54 (2000), 13-35.
 - [5] J. Cheeger and T. H. Colding: On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, *J. Differential Geom.* 54 (2000), 37-74.
 - [6] K. Fukaya: Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator. *Invent. Math.* 87 (1987), 517-547.
 - [7] K. Fukaya: Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications, Recent topics in differential and analytic geometry, 143-238, *Adv. Stud. Pure Math.* 18-I, Academic Press, Boston, MA, (1990).
 - [8] A. Futaki, S. Honda, and S. Saito: Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, *arXiv:1509.03862*, preprint.
 - [9] N. Gigli: Nonsmooth differential geometry-An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below, *arXiv preprint*, *arXiv:1407.0809*, to appear in *Mem. of the AMS*.
 - [10] M. Gromov: *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhauser Boston Inc, Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
 - [11] S. Honda: Ricci curvature and L^p -convergence, *J. Reine Angew. Math.* 705 (2015), 85-154.
 - [12] S. Honda: Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, *arXiv preprint*, *arXiv:1410.3296v5* (2014), to appear in *Mem. of the AMS*.
 - [13] 本多正平, Ricci 曲率が有界な空間の構造, *数学* 67, (2015), 154-178.
 - [14] S. Honda: Spectral convergence under bounded Ricci curvature, *arXiv preprint*, *arXiv:1510.05349*.
 - [15] R. Kobayashi and A. Todorov, Polarized period map for generalized $K3$ surfaces and the moduli of Einstein metrics, *Tohoku Math J.* 39 (1987), 145-151.
 - [16] Y. Otsu and T. Shioya: The Riemannian structure of Alexandrov spaces, *J. Differential Geom.* 39 (1994), 629-658.
 - [17] D. Page, A physical picture of the $K3$ gravitational instantons, *Phys. Lettr. Ser. B* 80 (1978), 5557.
- E-mail address:* shonda@m.tohoku-u.ac.jp